万有引力与航天专题

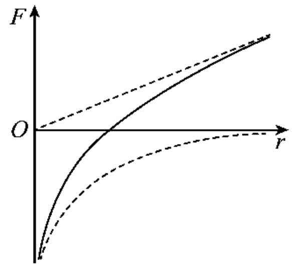
1．【答案】(1)a．$\frac{4}{3}G\rho_0\pi m r_0$，　b．$F_{引}=\frac{4}{3}G\rho_0\pi m r_0^3\frac{1}{r^2}$　(2) $F_{斥}=\frac{4}{3}G'\rho_1\pi m r$　(3)见解析

【解】（1）a．由题可知，球体内包含的质量大小为$M=\frac{4}{3}\rho_0\pi r_0^3$

根据万有引力定律可得，星系P受到引力的大小为$F_0=\frac{GMm}{r_0^2}=\frac{4}{3}G\rho_0\pi m r_0$

b．宇宙膨胀过程中星系P受到的引力大小$F_{引}=\frac{GMm}{r^2}$，结合$M=\frac{4}{3}\rho_0\pi r_0^3$

解得$F_{引}$随距离r变化的关系式$F_{引}=\frac{4}{3}G\rho_0\pi m r_0^3\frac{1}{r^2}$



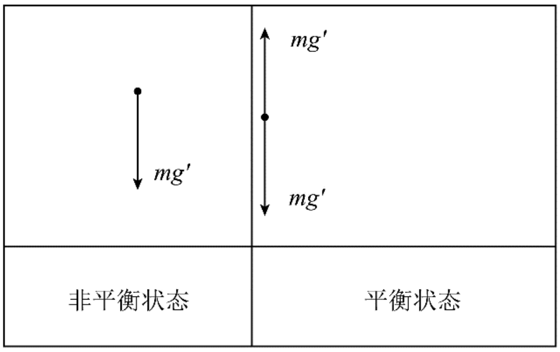
（2）当P到O的距离为r时，球体内包含的“未知物质”的质量为$M'=\frac{4}{3}\rho_1\pi r^3$

星系P受到的斥力为$F_{斥}=\frac{G'M'm}{r^2}=\frac{4}{3}G'\rho_1\pi m r$

（3）a．根据上述分析可知，$F_{引}\propto\frac{1}{r^2}$，$F_{斥}\propto r$，故其大致图像如图。

b．此后P的运动情况可能为：P做远离O点的加速度增加的加速运动；P做靠近O点的加速度增加的加速运动；P处于静止状态。

2．【答案】(1)见解析(2)$G\frac{mm_0}{(L+R)^2}-G\frac{mm_0}{L^2}$，背向月球(3)见解析



【解】（1）表格如图所示。

（2）根据牛顿第二定律可得$G\frac{Mm}{L^2}=Ma_{\mathrm{M}}$

则地球转动的加速度为$a_{\mathrm{M}}=G\frac{m}{L^2}$

不计地球自转，质点m_0所受引潮力为$F_{引潮}=G\frac{mm_0}{(L+R)^2}-m_0a_{\mathrm{M}}$

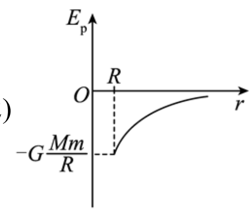
所以$F_{引潮}=G\frac{mm_0}{(L+R)^2}-G\frac{mm_0}{L^2}$，方向背向月球；

（3）以小行星为研究对象，研究小行星离地球最远的部分所受引潮力，该部分质量为m_0，设小行星瓦解时到地球球心距离为L，则有$G\frac{Mm}{L^2}=ma$，根据题意小行星被撕碎的临界条件为$m_0a-G\frac{Mm_0}{(L+r)^2}=G\frac{mm_0}{r^2}$

联立可得$G\frac{2Mm_0r}{L^3}=G\frac{mm_0}{r^2}$　根据质量和密度的关系可得$L=\sqrt[3]{\frac{2\rho_{\mathrm{M}}}{\rho_{\mathrm{m}}}}R=1.54R>R$

由此可知，小行星在落到地球表面之前就已经被瓦解。

3．【答案】(1)$\frac{v_1}{v_2}=\frac{r}{R}$；$k=\frac{GM}{4\pi^2}$，$k$值由地球质量决定　(2)



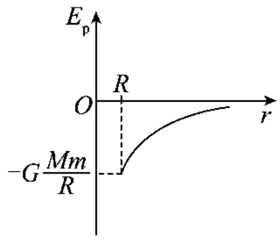
，$v_0=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$；　E

【详解】（1）①卫星在椭圆轨道Ⅱ上运行时，在近地点和远地点的等效圆周运动的半径分别为r_1和r_2，由万有引力提供向心力，在近地点$G\frac{Mm}{R^2}=m\frac{v_1^2}{r_1}$，在远地点$G\frac{Mm}{r^2}=m\frac{v_1^2}{r_2}$

由椭圆的对称性可知$r_1=r_2$　联立解得$v_1R=v_2r$，$\frac{v_1}{v_2}=\frac{r}{R}$

②选择质量为m的卫星以r_0的轨道半径绕地球做匀速圆周运动，运动周期为T_0，由地球的万有引力提供向心力，由牛顿第二定律$G\frac{Mm}{r_0^3}=m\frac{4\pi^2}{T_0^2}r_0$　解得卫星绕地球运行的k值表达式

$k=\frac{r_0^3}{T_0^2}=\frac{GM}{4\pi^2}$，可知$k$值由地球质量决定。



（2）①由题意可知，地球与探测器组成的系统具有的引力势能函数曲线如图所示。探测器在地球表面的引力势能为$E_p=-\frac{GMm}{R}$

可知静置于地面处的探测器，至少需要获得v_0速度，才能摆脱地球引力的束缚。由能量守恒定律

$\frac{1}{2}mv_0^2+E_p=0$　解得$v_0=\sqrt{\frac{-2E_p}{m}}=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$

②设地球绕太阳公转轨道半径为r，则火星轨道半径为$1.5r$，可知霍曼转移轨道半长轴为$\frac{r+1.5r}{2}=1.25r$

对地球和探测器，由开普勒第三定律$\frac{r^3}{T_地^2}=\frac{(1.25r)^3}{T_探^2}$　解得$T_探\approx1.40T_地$

对地球和火星，由开普勒第三定律$\frac{r^3}{T_地^2}=\frac{(1.5r)^3}{T_火^2}$　解得$T_火\approx1.84T_地$

则有$T_探=\frac{1.40}{1.84}T_火\approx\frac{6}{8}T_火$

在地球公转轨道上H点的探测器开始发射，到I点的时间为探测器的半个周期，即$t=\frac{1}{2}T_探=\frac{3}{8}T_火$

可知当火星运行到E点附近时开始发射。

4．【答案】(1)$\omega=\sqrt{\frac{2GM_0}{L^3}}$ (2)a.$\frac{8G^4M^5}{5\pi c^5r^4D^2}$；b. $\overline{P}=\frac{GM^2}{2rt}$

【详解】（1）根据题意可知，由于A、B的质量均为M_0，则恒星A、B做圆周运动的半径为$\frac{L}{2}$，由万有引力提供向心力有$\frac{GM_0M_0}{L^2}=M_0\omega^2\cdot\frac{L}{2}$　解得$\omega=\sqrt{\frac{2GM_0}{L^3}}$

（2）a.根据题意可知，t时间内引力波辐射的能量为$\varepsilon=Pt=\frac{32G^4M^5t}{5c^5r^4}$，形成的面积为$S_0=4\pi D^2$

则能流密度$S=\frac{\varepsilon}{S_0t}=\frac{8G^4M^5}{5c^5r^4\pi D^2}$

b.根据题意，由万有引力提供向心力有$\frac{GM^2}{r^2}=M\frac{v_1^2}{\frac{r}{2}}$，$\frac{GM^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}=M\frac{v_2^2}{\frac{r}{4}}$

系统增加的动能$\Delta E_k=2\times\left(\frac{1}{2}Mv_2^2-\frac{1}{2}Mv_1^2\right)$　联立解得$\Delta E_k=\frac{GM^2}{2r}$

系统减小的势能$\Delta E_p=-\frac{GM^2}{r}-\left(-\frac{GM^2}{\frac{r}{2}}\right)=\frac{GM^2}{r}$　系统减小的机械能$\Delta E=\Delta E_p-\Delta E_k=\frac{GM^2}{2r}$

根据能量守恒定律有$\Delta E=\overline{P}t$　解得$\overline{P}=\frac{GM^2}{2rt}$